SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Función exponencial y logarítmica

Docente: Phflucker H. Coz

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Regla de correspondencia

$$f_{(x)} = b^x \; ; \; b > 0 \wedge b \neq 1$$

Ejemplos

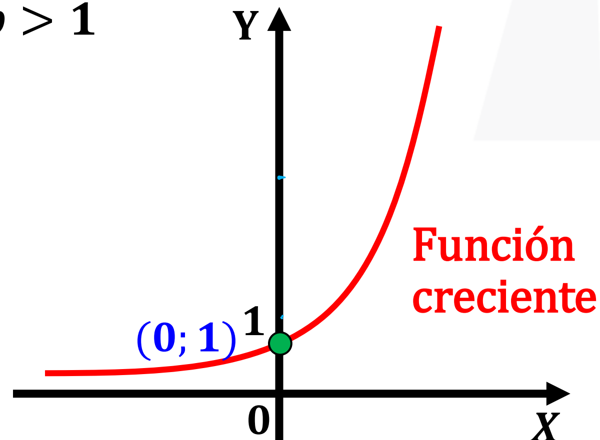
- $f_{(x)} = 3^x$
- $g_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Importante

$$\text{Dom}f = \mathbb{R} \quad \wedge \quad \text{Ran}f = \mathbb{R}^+$$

Gráfica de la función

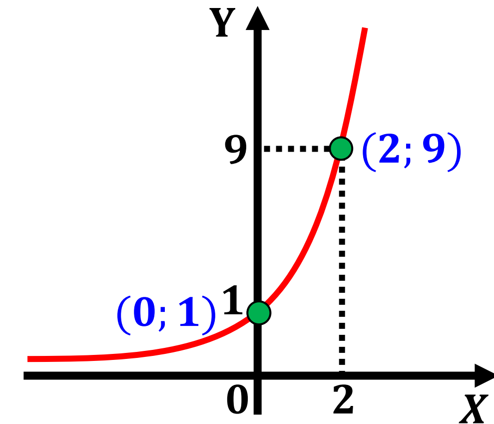
I. Si $b > 1$



Función creciente

Ejemplo

$$f_{(x)} = 3^x$$



Propiedad 1

$$b^m < b^n \leftrightarrow m < n$$

se mantiene

No cambia el sentido.

Ejemplo

Resuelva la inecuación

$$2^{|2x-6|} \leq 1024$$

$$2^{|2x-6|} \leq 2^{10}$$

$$|2x-6| \leq 10$$

$$-10 \leq 2x - 6 \leq 10$$

$+ 6 \; ; \div 2$

$$-2 \leq x \leq 8$$

$$\Rightarrow \text{CS} = [-2\,;8]$$

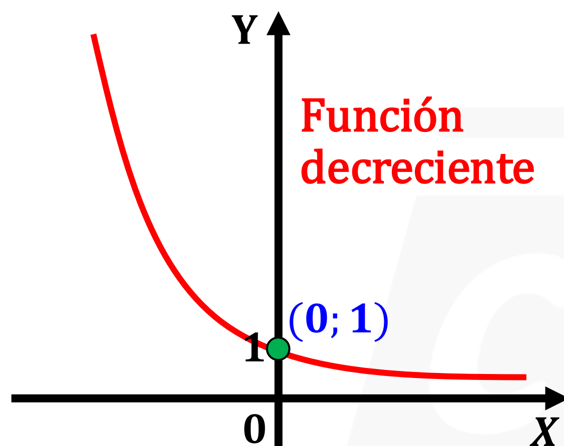
obs Si $|a| \leq b$

$\Rightarrow b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

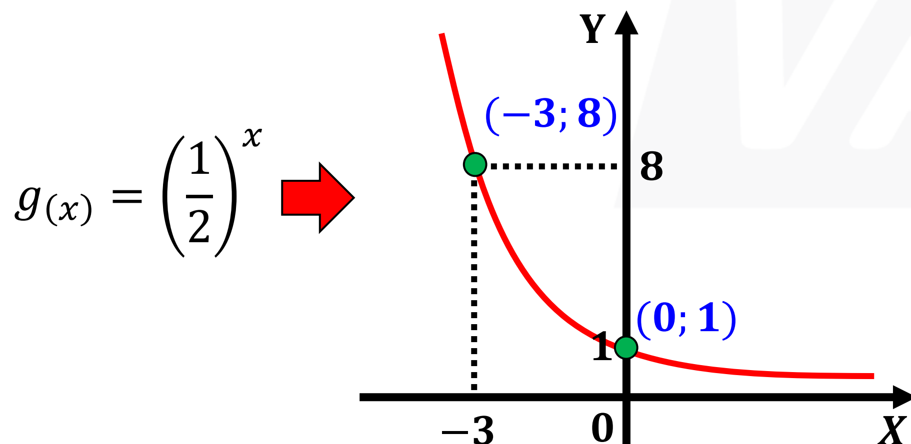
Gráfica de la función

II. Si $0 < b < 1$



Ejemplo

$$g_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Propiedad 2 (0<b<1)

$$b^m < b^n \leftrightarrow m > n$$

Cambia el sentido de la desigualdad.

Ejemplo

Resuelva la inecuación

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

$$x^2 > x + 2$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x-2)(x+1) > 0$$



Puntos críticos : -1 , 2

$\Longrightarrow$ CS $= \langle -\infty\,; -1\rangle \cup \langle 2\,;\, +\infty\rangle$

Tenga en cuenta que

La función exponencial es INYECTIVA.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Son las ecuaciones donde la incógnita se encuentra en el exponente.

Aplicación

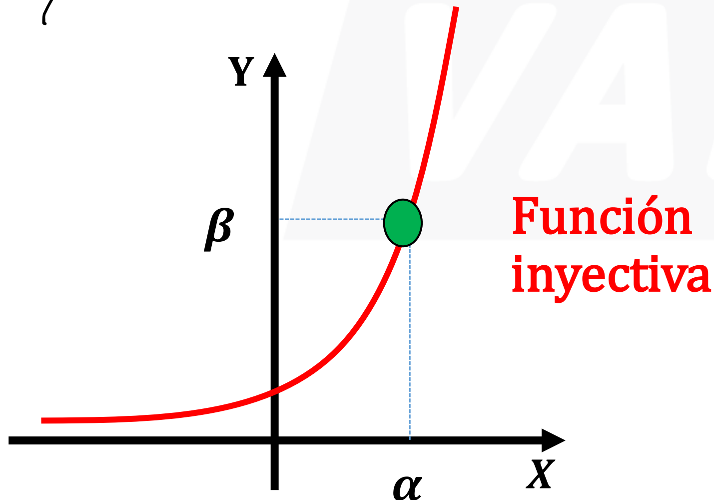
Resuelva la ecuación siguiente

Responda la mayor solución

$$2^{|x^2-6|} = \sqrt{2}^{|x^2-6|+3}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:



Función inyectiva

Teorema

f función inyectiva .

Sea α ; $\beta \in D_f$ Si $f_{(\alpha)} = f_{(\beta)} \Longrightarrow \alpha = \beta$

$$\sqrt{2}^{2|x^2-6|} = \sqrt{2}^{|x^2-6|+3}$$

Por teorema se tiene.

$$2|x^2-6| = |x^2-6| + 3$$

$$\Longrightarrow |x^2-6| = 3$$

$$x^2 - 6 = 3 \quad \vee \quad x^2 - 6 = -3$$

$$x^2 = 9 \quad \vee \quad x^2 = 3$$

$x=3 \vee x=-3$ $x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INECUACIÓN EXPONENCIAL

Son las inecuaciones donde la incógnita se encuentra en el exponente.

Propiedad 1

Sea $b > 1$

$$b^n < b^x < b^m \iff n < x < m$$

Ejemplo

Resuelva la inecuación

$$5^{-5} < 5^{2x-1} < 5^{13}$$

$$-5 < 2x - 1 < 13$$

$$-2 < x < 7$$

$+1\,;\div 2$

$$\Rightarrow \quad CS = \langle -2\,;7\,\rangle$$

Propiedad 2

Sea $0 < b < 1$

$$b^n < b^x < b^m \iff n > x > m$$

Ejemplo 1

Resuelva la inecuación

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$0 \leq x^2 < 2$$

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad CS = \langle -\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,\rangle$$

$0 \leq x^2 \wedge x^2 < 2$

$\forall x \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{x^2} < \sqrt{2}$

$|x| < \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Ejemplo 2

Determine el rango de la función

$$f_{(x)} = 3^{x^2}\,;\ \text{Dom}(x) = \mathbb{R}$$

exponente

base

Como $x^2 \geq 0\,;x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad 3^{x^2} \geq 3^0$$

$$f_{(x)} \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{Ran} f = [1;+\infty\,\rangle$$

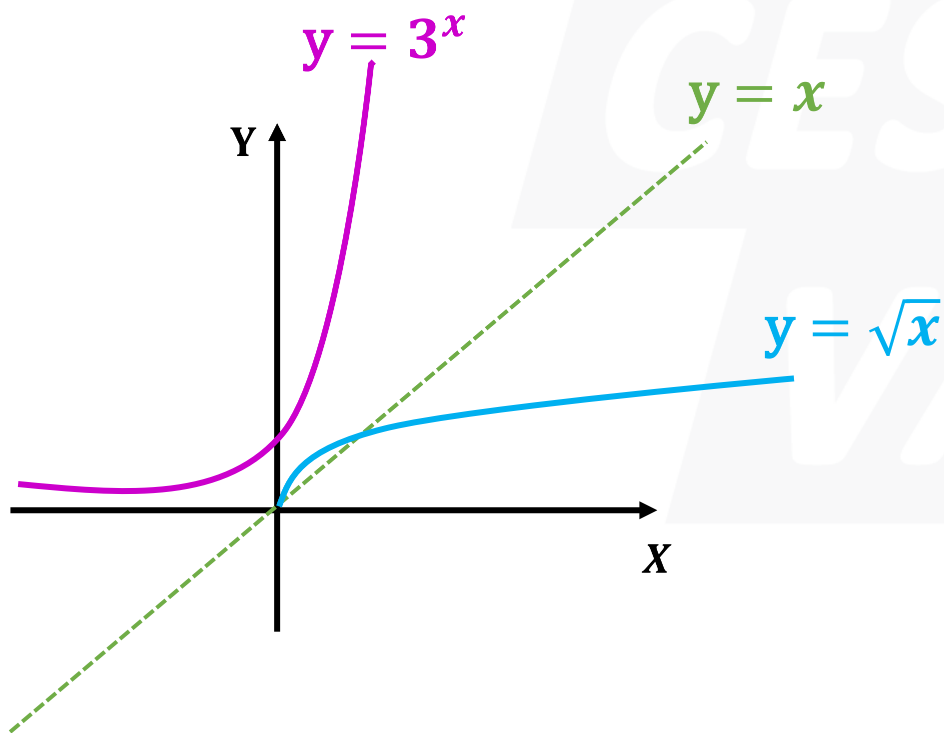
Aplicación

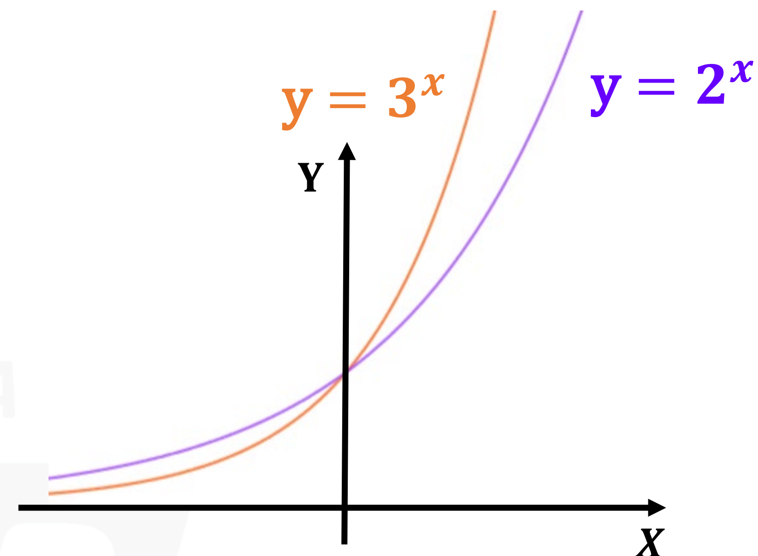
Halle la suma de soluciones enteras de la inecuación

$$\left(3^{x-1}-\sqrt{x-1}\right)(3^x-2^x)(3^{x-2}-27)<0$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10

Resolución:





Condición de existencia $\underbrace{x-1\geq 0}_{x\geq 1}$

$$\underbrace{\left(3^{x-1}-\sqrt{x-1}\right)}_{+}\underbrace{(3^x-2^x)}_{+}\left(3^{x-2}-27\right)<0$$

$$\left(3^{x-2}-27\right)<0$$

$$\underbrace{3^{x-2}<3^3}_{x<5}$$

De donde tenemos: $1\leq x<5$

1; 2; 3; 4

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Regla de correspondencia

$f_{(x)} = \log_b x \quad$ donde $b > 0 \wedge b \neq 1$

Ejemplos

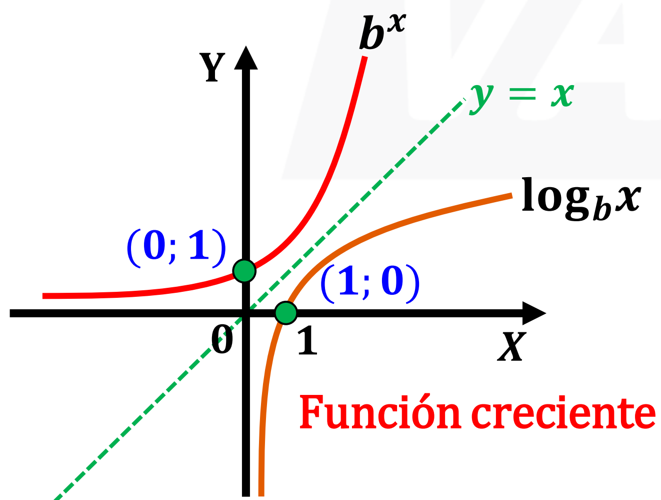
- $f_{(x)} = \log_4 x$
- $f_{(x)} = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$

Importante

$\text{Dom}f = \mathbb{R}^+ \wedge \text{Ran}f = \mathbb{R}$

Gráfica de la función

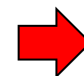
I. Si $b > 1$

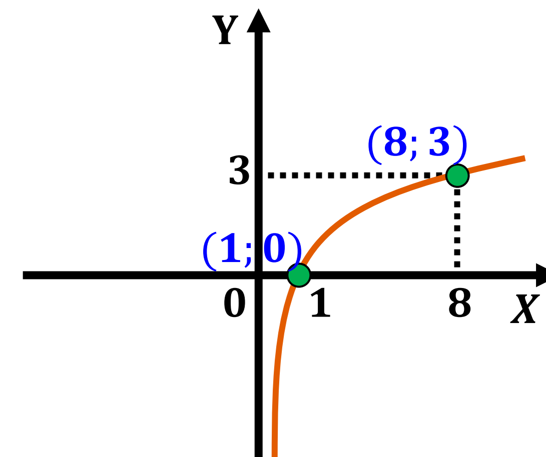


Función creciente

Ejemplo

$f_{(x)} = \log_2 x$





Propiedad 1 $(b > 1)$

$\log_b M < \log_b N \leftrightarrow M < N \; ; \quad M > 0, N > 0$

No cambia el sentido.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedad 1

Sean x_1 y x_2 números positivos, además $b > 1$

Si $\log_b x_1 < \log_b x_2 \implies x_1 < x_2$

Se mantiene la relación de orden

Aplicación

Resuelva la inecuación

$\log_7(2x-4) < \log_7(x+8)$

Resolución:

- Condición de existencia

$$2x-4>0 \quad \wedge \quad x+8>0$$

$$x>2 \qquad x>-8$$

$$x>2 \quad \ldots\alpha$$

- $\log_7(2x-4) < \log_7(x+8)$

Aplicando la propiedad 1

$$2x-4 < x+8$$

$$x<12 \quad \ldots\beta$$

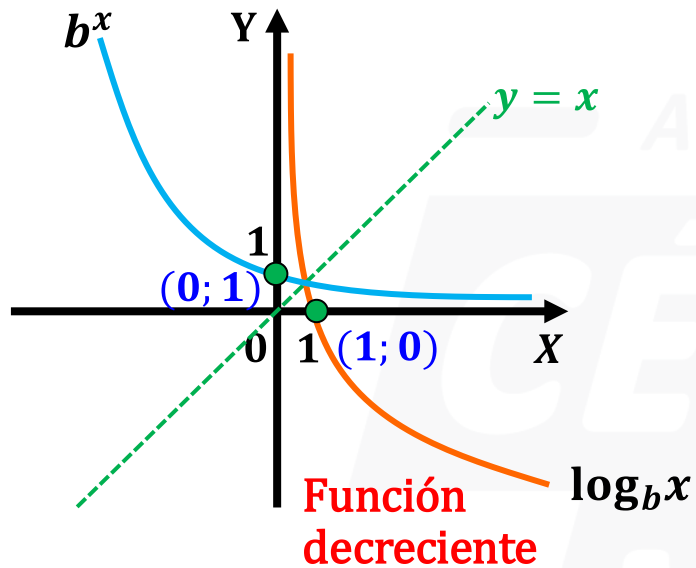
- El conjunto solución es la intersección de α y β

$\implies C.S = \langle 2;12\rangle$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

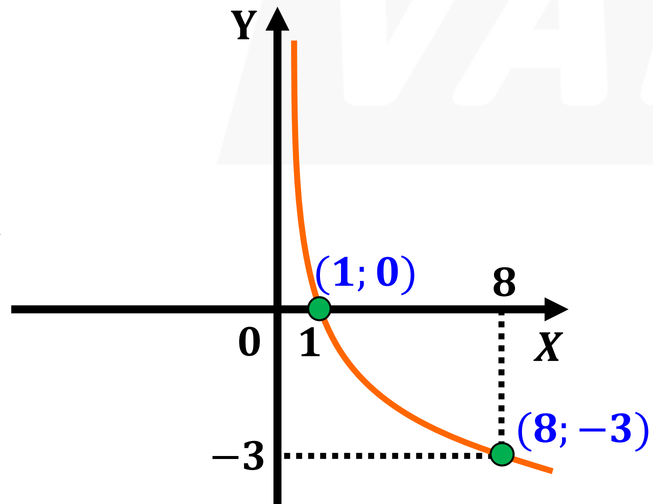
Gráfica de la función

II. Si $0 < b < 1$



Ejemplo

$g_{(x)} = \log_{\frac{1}{2}} x$



Propiedad 2 $(0 < b < 1)$

$$\log_b M < \log_b N \leftrightarrow \quad M > N > 0$$

Cambia el sentido.

Aplicación

Resuelva la inecuación $\log_{\frac{1}{4}} |x| < \log_{\frac{1}{4}} 5$

Resolución:

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedad 2

Sean x_1 y x_2 números positivos, además $0 < b < 1$

Si $\log_b x_1 < \log_b x_2 \implies x_1 > x_2$

Cambia la relación de orden

Aplicación

Resuelva la inecuación

$$\log_{\frac{1}{4}} |x| < \log_{\frac{1}{4}} 5$$

Resolución:

- Condición de existencia

$$|x| > 0$$

$$x \neq 0 \quad \ldots \alpha$$

- $\log_{\frac{1}{4}} |x| < \log_{\frac{1}{4}} 5$

Aplicando la propiedad 2

$$|x| > 5$$

$$x > 5 \ \vee \ x < -5 \quad \ldots \beta$$

- El conjunto solución es la intersección de α y β

$$\implies C.S = \langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedades $A; C \in \mathbb{R}^+ \wedge (b > 0 \wedge b \neq 1)$

$\log_b(AC) = \log_b A + \log_b C$	$\log_b(A/C) = \log_b A - \log_b C$	$\log_{b^m} A^n = \dfrac{n}{m}\log_b A$
$\log_5(12) = \log_5 3 + \log_5 4$	$\log_2(7/2) = \log_2 7 - \log_2 2$	$\log_{3^5} 7^2 = \dfrac{2}{5}\log_3 7$
$\log_b A = \dfrac{\log_c A}{\log_c b}$	$\log_b A \times \log_A C = \log_b C$	$b^{\log_b A} = A$
$\log_7 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 7}$	$\log_5 3 \times \log_3 7 = \log_5 7$	$7^{\log_7 8} = 8$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ECUACIÓN LOGARÍTMICA

Es aquella ecuación donde la incógnita se encuentra afectado por el logaritmo.

Definición de logaritmo

$$\log_b(x) = n \iff x = b^n \quad ; x > 0, b > 0, b \neq 1$$

Aplicación

Indique una solución de la siguiente ecuación

$$2.27^x + 9 = 17.9^x + 10.3^x$$

A) $\log_3 2$ B) $\log_2 3$ C) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ D) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ E) $\frac{1}{2}$

Resolución:

$2(3^x)^3 + 9 = 17(3^x)^2 + 10(3^x)$

Sea $3^x = y \ldots \psi$ positivo

$2y^3 - 17y^2 - 10y + 9 = 0$

	2	−17	−10	9
−1	↓	−2	19	−9
	2	−19	9	0

$y = -1 \lor 2y^2 - 19y + 9 = 0$

$2y \quad -1$

$y \quad -9$

$y = -1 \lor y = \frac{1}{2} \lor y = 9$

$3^x = \frac{1}{2}$; $3^x = 3^2$, $x = 2$

$\log_3 3^x = \log_3 \frac{1}{2}$; $x = \log_3 \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_{3^{-1}} 2$

$\log_b a = \log_{b^n} a^n$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INECUACIÓN LOGARÍTMICA

Es aquella inecuación donde la incógnita se encuentra afectado por el logaritmo.

Propiedad 1 ($b > 1$)

$$0 < m < x < n \leftrightarrow \log_b(m) < \log_b(x) < \log_b(n)$$

Propiedad 2 ($0 < b < 1$)

$$0 < m < x < n \leftrightarrow \log_b(m) > \log_b(x) > \log_b(n)$$

Aplicación

Determine la suma del máximo y mínimo valor entero del conjunto solución de la inecuación

$$1 \leq \log_3(x^2 - 6x + 12) < 3$$

Resolución:

➢ Condición de existencia $x^2-6x+12 > 0$

$\underbrace{(x^2-6x+9)}_{+} + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$* \quad \log_3 3 \leq \log_3(x^2-6x+12) < \log_3 3^3$

$3 \leq x^2-6x+12 < 27$

resto 3: $0 \leq (x-3)^2 < 24$

$-\sqrt{24} < x-3 < \sqrt{24}$

$3-\sqrt{24} < x < 3+\sqrt{24}$ ($\sqrt{24}$: 4,8...)

$-1,8\ldots < x < 7,8\ldots$

en $\mathbb{Z}$: $-1; 0; 1; 2; \ldots; 7$ Rta 6

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe